QUELQUES RÉFLEXIONS SUR LE LANGAGE DES MATHÉ-MATIQUES EN ÉCOLOGIE

David NÉRINI

David Nérini est enseignant-chercheur à l'Institut Méditerranéen d'Océanologie à Marseille. Il y enseigne les statistiques et les probabilités. Ses champs de recherche couvrent la biologie et l'écologie des populations. Il s'intéresse plus particulièrement à la description et à la modélisation de systèmes vivants et des interactions avec leur environnement via l'utilisation et le développement d'outils mathématiques issus de la statistique et des probabilités.

C'est pourquoi nous lui avions demandé de participer, au même titre qu'un cinéaste et qu'un architecte-urbaniste, à la réflexion de l'AFL sur *L'exercice des différents langages*, thème de l'Université d'été de juillet 2011 (A.L. n°115, septembre 2011, pp.54-80).

On lira ci-après la transcription de son intervention qui n'a pu être jointe à celles des autres intervenants à cette université d'été.

Les méthodes développées ont deux objectifs principaux. Le premier concerne la simplification de la complexité (réduction de dimension) des systèmes étudiées en vu de pouvoir rendre leur analyse mathématique possible. Le second, complémentaire du premier, s'intéresse à la nature même des données qu'on peut échantillonner dans l'océan. L'eau est un milieu continu et la prise en compte de cet aspect lorsqu'on traite de données sous forme de courbes, pose des problèmes techniques fondamentaux dans le choix des méthodes qui permettront de réduire la complexité d'un système étudié.

L'océanologie n'est pas une science mais un ensemble de disciplines scientifiques fédérées autour d'un thème unique : l'étude des océans. Tenter d'embrasser les phénomènes nombreux et complexes qui interagissent à différentes échelles, spatiales et temporelles et qui structurent le fonctionnement physique des océans, ainsi que la Vie qui les anime, sous-entend une collaboration étroite entre de nombreuses disciplines scientifiques. La compréhension de la circulation océanique fait intervenir des domaines de la physique : dynamique des fluides, géophysique, thermodynamique, mais également les sciences de l'atmosphère. L'étude du cycle des éléments dans les océans (carbone, azote,...) est assuré par des biogéochimistes. L'étude des organismes, des populations qui habitent ces océans, des interactions qui les lient avec leur environnement, est sous la responsabilité des biologistes. L'analyse des données, la modélisation est confiée aux mathématiciens, aux informaticiens.

Chacune de ces disciplines possède son propre langage mais il en est un commun à plusieurs d'entre elles : celui des mathématiques. La mathématisation des sciences dures est apparue dès la fin du 19e siècle. Les succès rigoureux de la logique, branche des mathématiques dédiée à l'étude du langage mathématique, ont conduit à l'élaboration d'un formalisme axiomatique permettant d'unifier sous un même langage des notions jusqu'à lors considérées comme étrangères. Citons Henri Poincaré[1], mathématicien français de renom : *« Longtemps les objets dont s'occupent les mathématiciens étaient mal définis ; on croyait les connaître parce qu'on se les représentait avec les sens ou l'imagination, mais on n'en avait qu'une image grossière et non une idée précise sur laquelle le raisonnement pût avoir prise. C'est là que les logiciens ont dû porter leurs efforts. »*

Cette mathématisation des sciences dures s'est concrétisée par les progrès spectaculaires réalisés en physique pendant la première moitié du 20e siècle et qui ont à jamais façonné le monde technologique dans lequel nous évoluons. Cependant, la biologie et plus particulièrement l'écologie, est un des derniers domaines des sciences qui tardent à se mathématiser. Il faudra attendre la seconde moitié du 20e siècle pour voir apparaître des pans entiers de la recherche scientifique orientés vers une formalisation mathématique des phénomènes qui décrivent les organismes vivants. Ce retard peut s'expliquer par la difficulté d'élaborer des lois générales en écologie. Dès lors qu'on s'intéresse à des systèmes vivants, il apparaît inévitablement une variabilité importante. Il est difficile, à partir d'un grand nombre de relevés effectués dans des conditions expérimentales similaires de tirer des règles générales sur le fonctionnement d'un organisme, d'un écosystème, comme cela a pu être le cas en physique. Ceci est d'autant plus vrai lorsqu'on traite du milieu naturel. Alors pourquoi le langage des mathématiques s'est-il imposé dans de nombreuses disciplines scientifiques et devient-il aujourd'hui nécessaire en écologie ?

Le langage des mathématiques est un langage structuré dont l'usage permet de se distancier du réel, des objets qu'il permet d'étudier. C'est un langage qui a donc une forte capacité d'abstraction, ce qui permet, dans bon nombre de

1. Claude POINCARÉ, Henri (1908), Science et méthode, Cahier spécial 3, LHSP, Ed. 2011, 191p.

cas, de répondre à des problématiques en apparence très dissemblables, mais qui pourtant ont des liens subtils, qui échappent le plus souvent à une simple comparaison. Les structures de différents objets d'étude peuvent paraître dissemblables, mais une fois formalisées avec les mêmes notions mathématiques, elles présenteront des caractéristiques ou des propriétés similaires. C'est en cela que le langage des mathématiques est le seul qui possède une bonne capacité de généralisation, une capacité à construire des théories[2] : *« Je ne sais si je n'ai déjà dit quelque part que la Mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. Il convient que ces choses, différentes par la matière, soient semblables par la forme, qu'elles puissent, pour ainsi dire, se couler dans le même moule. Quand le langage a été bien choisi, on est tout étonné de voir que toutes les démonstrations, faites pour un objet connu, s'appliquent immédiatement à beaucoup d'objets nouveaux ; on n'a rien à y changer, pas même les mots, puisque les noms sont devenus les mêmes. »*

En fait, plus qu'un formalisme, la manipulation du langage des mathématiques, le langage de l'abstraction, permet de structurer sa pensée, d'élaborer des raisonnements justement éloignés de ceux qui peuvent être suggérés par une réalité trompeuse parce qu'attachée à nos cinq sens, à nos émotions, et souvent emprunte de la subjectivité liée à notre caprice personnel de vouloir que les éléments fonctionnent de la manière dont on le désire.

« J'ai essayé d'apprendre les mathématiques, et j'ai même étudié pendant l'été 1828 avec un professeur particulier (un homme très terne), mais j'avançais très lentement. Le travail me répugnait, tout d'abord parce que je n'arrivais pas à trouver un sens quel qu'il soit dans les premiers principes de l'algèbre. Cette impatience était stupide, et des années plus tard, j'ai profondément regretté de ne pas avoir été assez loin pour au moins comprendre un petit peu des grands principes fondamentaux des mathématiques : car les hommes qui les ont acquis semblent avoir un sens supplémentaire – un sixième sens... »[3]

Paradoxalement, faire des mathématiques en écologie marine consiste tout d'abord à être interpellé par un problème lié à une autre discipline. Par exemple, l'étude de l'évolution d'une population de phytoplancton ne peut pas être menée sans porter un intérêt aux espèces qui constituent cette population et au milieu dans lequel elles évoluent. La formalisation par le langage des mathématiques de la dynamique de cette population fera appel à un moment donné à un ensemble de paramètres qu'il faudra estimer, soit à l'aide de connaissances acquises, soit par le biais d'expériences réalisées par le biologiste. Ces valeurs de paramètres, tout comme les variables et leurs interactions qui structurent le modèle, doivent rester cohérentes avec la biologie des organismes étudiés : une cellule phytoplanctonique ne se comporte pas comme un lion dans la savane.

La modélisation d'un système biologique va également se heurter à la complexité qui caractérise tout système vivant. La prise en compte d'un nombre élevé d'interactions, souvent déterminées de manières empiriques, entre les organismes et leur environnement mène à

2. Garfunkel, Sol & Mumford, David (2011), Aux États-Unis, l'enseignement des mathématiques est totalement obsolète, *Le Monde*, 14 sept. 2011 **3.** Darwin (1887) Autobiographie, Trad. J. M. Goux, Seuil, 2008, 243 pp.

l'élaboration de modèles complexes dont il sera vain d'espérer en comprendre le fonctionnement. La complexité biologique est en quelque sorte transformée par des relations mathématiques dont les interactions sont toutes aussi obscures que la réalité décrite. On pourra tout au plus mimer les comportements biologiques à l'aide d'un ordinateur sans aucune capacité de généralisation. Comme il n'existe que peu de lois en biologie, le modélisateur va donc devoir opérer des choix dans la formulation des processus qui vont constituer son modèle dynamique. Ces choix sont généralement dictés par les connaissances acquises antérieurement mais aussi par les connaissances développées et apportées par les autres disciplines. Ces choix relèvent également de faits dignes d'être étudiés qui, par analogie avec d'autres faits d'apparence étrangers, seront susceptibles de conduire à la découverte d'une loi biologique. La complexité d'un modèle mathématique sera donc bornée par un jeu d'hypothèses clairement explicité et inspiré de la réalité de faits biologiques tenus pour fondamentaux. C'est à ce prix qu'il sera alors possible de se détacher de la réalité biologique pour se consacrer exclusivement à l'étude mathématique du modèle sensé décrire une partie de cette réalité.

Une fois plongé dans le domaine des mathématiques, il est intéressant de se pencher sur les processus cognitifs qui vont rentrer en jeu dans le travail du chercheur. Il va globalement se passer deux choses. Soit le modèle qui a été construit est classique du point de vue des hypothèses énoncées et de sa structure. Dans ce cas, le travail du chercheur consiste à appliquer des résultats déjà connus de la littérature : le seul intérêt dans ce cas sera le retour de la prestation de service effectuée auprès de son collègue biologiste pour lui apporter des réponses concernant le cas particulier du système à l'étude. Dans ce cas, le travail ne présente que peu d'intérêt pour le mathématicien : un biologiste averti, connaissant ses bases en mathématiques, aurait pu faire le travail.

La deuxième aventure, plus intéressante, apparaît lorsque le modèle formalisé dans le langage des mathématiques pose des problèmes techniques qu'il va falloir résoudre. Un long travail ardu est alors nécessaire, qui peut sembler stérile mais qui peut être suivi par une découverte qui jaillira au cours d'une « illumination soudaine ». Selon Poincaré, un travail inconscient formerait à notre insu, un ensemble complexe de cheminements de l'esprit. Émergeront à notre conscience ceux qui affecteront le plus notre sensibilité par leur beauté et leur harmonie. En d'autres termes, le langage des mathématiques permet au mathématicien de formaliser, de construire non pas une idée qui serait déjà existante, mais quelque chose qui a été pensé inconsciemment et que seule l'utilisation du langage peut faire émerger. C'est une idée que l'on retrouve chez Claude Simon[4] : *« Eh bien, lorsque je me trouve devant ma page blanche, je suis confronté à deux choses : d'une part le trouble magma d'émotions, de souvenirs, d'images qui se trouve en moi, d'autre part la langue, les mots que je vais chercher pour le dire, la syntaxe par laquelle ils vont être ordonnés et au sein de laquelle ils vont en quelque sorte se cristalliser. Et, tout de suite, un premier constat: c'est que l'on n'écrit (ou ne décrit) jamais quelque chose qui s'est passé*

4. C. Simon (1985), Discours du prix Nobel de littérature, www.nobelprize.org *avant le travail d'écrire, mais bien ce qui se produit (et cela dans tous les sens du terme) au cours de ce travail, au présent de celui-ci, et résulte, non pas du conflit entre le très vague projet initial et la langue, mais au contraire d'une symbiose entre les deux qui fait, du moins chez moi, que le résultat est infiniment plus riche que l'intention. »*

... et qui rejoint l'« invention mathématique » de Poincaré : *« Ce qui frappera tout d'abord, ce sont ces apparences d'illumination subite, signes manifestes d'un long travail inconscient antérieur ; le rôle de ce travail inconscient, dans l'invention mathématique, me paraît incontestable et l'on en trouverait des traces dans d'autres cas où il est moins évident. Souvent, quand on travaille une question difficile, on ne fait rien de bon la première fois qu'on se met à la besogne ; ensuite, on prend un repos plus ou moins long, et on s'assoit de nouveau devant sa table. Pendant la première demi-heure, on continue à ne rien trouver ; puis, tout à coup, l'idée décisive se présente à l'esprit. On pourrait dire que le travail conscient a été plus fructueux parce qu'il a été interrompu et que le repos a rendu à l'esprit sa force et sa fraîcheur. Mais il est plus probable que ce repos a été rempli par un travail inconscient, et que le résultat de ce travail s'est révélé ensuite au géomètre, tout à fait comme dans les cas que j'ai cités ; seulement la révélation, au lieu de se faire jour pendant une promenade ou un voyage, s'est produite pendant une période de travail conscient, mais indépendamment de ce travail, qui joue tout au plus un rôle de déclenchement, comme s'il était l'aiguillon qui aurait excité les résultats déjà acquis pendant le repos, mais restés inconscients, à revêtir la forme consciente.*

Il y a une autre remarque à faire au sujet des conditions de ce travail inconscient : c'est qu'il n'est possible et, en tout cas, qu'il n'est fécond que s'il est, d'une part, précédé, et, d'autre part, suivi d'une période de travail conscient. Jamais [...]) ces inspirations subites ne se produisent sinon après quelques jours d'efforts volontaires, qui ont paru absolument infructueux et où l'on a cru ne rien faire de bon, où il semble qu'on a fait totalement fausse route. Ces efforts n'ont donc pas été aussi stériles qu'on le pense ; ils ont mis en branle la machine inconsciente, et sans eux elle n'aurait pas marché et elle n'aurait rien produit. ».

Poincaré décrit ici un certain nombre d'allers/retours entre travail conscient et moment de repos, entre magma d'idées et production écrite. Il montre que la création mathématiques passe par un ensemble de rétroactions liant l'idée fugace surgit de l'inconscient et l'organisation, la production de cette idée sur du papier. Cette émergence d'une idée nouvelle, d'une invention reste indissociable d'un travail conscient en amont et en aval de la « pensée sauvage » primale.

À la lecture de ce qui vient d'être exposé, les questions d'enseignement ont une importance capitale. D'abord de manière intrinsèque, mais aussi parce que la réflexion qui doit être menée pour faire pénétrer des notions nouvelles dans les « cerveaux vierges » est en même temps une façon de réfléchir sur la manière dont ces notions ont été découvertes par nos prédécesseurs et par conséquent, sur leur nature originelle. Pourquoi la plupart des étudiants, munis d'un minimum d'esprit logique, ont une aversion contre les mathématiques ?

On peut légitimement considérer que pour apprendre les mathématiques, il faut commencer par en connaître les bases (la syntaxe). Nul besoin de s'appuyer sur des éléments du réel, puisqu'à terme, le formalisme est conçu pour s'en détacher. Il s'agit en fait de considérer les règles d'assemblages d'éléments syntaxiques comme un jeu sémantique que l'abstraction a privé de matière. L'objectif est d'apprendre ces règles et de réaliser un certain nombre d'opérations logiques permettant, soit de construire de nouvelles règles, soit d'en retrouver certaines à partir d'un corpus d'hypothèses postulées par avance. C'est en quelque sorte un grand jeu de l'esprit, totalement détaché de toutes considérations pratiques et de la réalité, mais qui garde tout son sens dans l'espace où il a été conçu : celui des mathématiques. Cependant, l'expérience mathématiques s'avère être un échec pour le plus grand nombre et si l'on en croit Poincaré, les choses n'ont pas évolué : *« Qu'est-ce que comprendre ? Ce mot a-t-il le même sens pour tout le monde ? Comprendre la démonstration d'un théorème, est-ce examiner successivement chacun des syllogismes dont elle se compose et constater qu'il est correct, conforme aux règles du jeu ? De même comprendre une définition, est-ce seulement reconnaître qu'on sait déjà le sens de tous les termes employés et constater qu'elle n'implique aucune contradiction ?*

Oui, pour quelques-uns ; quand ils auront fait cette constatation, ils diront : j'ai compris. Non, pour le plus grand nombre. Presque tous sont beaucoup plus exigeants, ils veulent savoir non seulement si tous les syllogismes d'une démonstration sont corrects, mais pourquoi ils s'enchaînent dans tel ordre, plutôt que dans tel autre. Tant qu'ils leur semblent engendrés par le caprice, et non par une intelligence constamment consciente du but à atteindre, ils ne croient pas avoir compris. »

Le dégoût prononcé des étudiants pour le domaine des mathématiques (pas uniquement en sciences du vivant) est essentiellement justifié par la perception d'une matière détachée des contingences du réel (« M'sieur, a quoi ça sert ? ») et par un manque d'utilité renforcé par l'utilisation d'un formalisme perçu comme « incompréhensible ». Partant de ce constat, une idée consisterait à aborder le problème de manière globale, c'est-à-dire à ancrer les connaissances en mathématiques dans la réalité : il s'agirait, à partir d'observations du monde réel, d'y connecter les outils abstraits des mathématiques, de manipuler de manière concrète de notions apparaissant abstraites.

Dans un article du *Monde* du 14/09/2011, les auteurs pointent du doigt l'obsolescence de l'enseignement des mathématiques aux États-Unis et prônent les apprentissages concrets face aux cursus abscons et abstraits. Effectivement, c'est par l'intermédiaire de problèmes du monde réel que sont apparues les mathématiques, qu'elles se sont développées au cours de l'histoire de l'humanité et qu'elles s'ancrent aujourd'hui dans notre culture.

Cependant, l'enseignement de masse des mathématiques tel qu'il est couramment pratiqué dans les filières biologiques universitaires, consiste à présenter à l'étudiant une suite de recettes, plus ou moins explicites, susceptibles de répondre à la majorité des problématiques qu'il rencontrera dans son futur métier. En supposant l'exhaustivité des méthodes présentées et en fonction du type de données dont il disposera, le sujet suivra une sorte d'arbre de décision qui lui permettra de trouver que telle ou telle méthode permet de répondre à une question pratique bien précise. Rien de plus concret : tout ce qui est déclaré inutile est éliminé. Il ne s'agit pas dans ce cas de profiter de l'avantage indéniable du langage des mathématiques à susciter le raisonnement car il s'agit ici de régler des « problèmes de la vie quotidienne ».

En filigrane, proposer un tel enseignement des mathématiques permettra de disposer de personnels efficaces, pragmatiques et rapidement opérationnels en cloisonnant le savoir en fonction de prérogatives liées aux problèmes de la vie quotidienne. Il est clair dans ce cas que la capacité de réflexion sur un problème exotique, l'autonomie d'un sujet face à l'analyse de ce problème et à sa résolution, sont mises au rebut : le monde industriel, le monde technologique tel que nous le connaissons, tel qu'il évolue et dont les applications mathématiques ont toujours constitué les fondements, ne souhaite pas disposer de gens qui décident, cet exercice étant réservé à une élite qu'il convient de sélectionner sur des critères souvent volontairement éloignés de la capacité à raisonner de manière rationnelle.

Les auteurs de l'article s'insurgent ensuite : *« Est-ce que la majorité des adultes ont souvent l'occasion de résoudre des équations du second degré ? Ont-ils besoin de savoir ce qu'est « un groupe de transformations » ou « un nombre complexe » ? ».* Malheureusement, le premier exemple est très mal choisi. Dès lors qu'un maçon doit calculer la surface d'une maison à construire en respectant les plans de l'architecte, une équation du second degré apparaît et permet simplement de résoudre le problème.

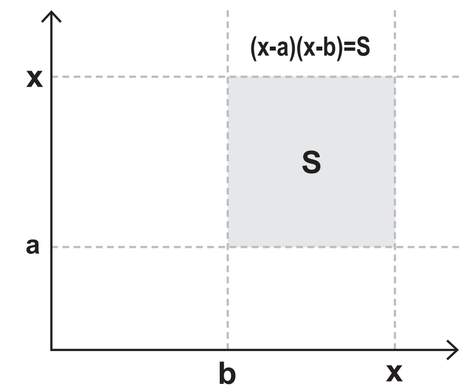

Figure 1. Déterminer la valeur **x** pour que la surface grise soit égale à la valeur **S**, étant donnés **a** et **b**, consiste à résoudre une équation du second degré.

Si le maçon n'a jamais été confronté à une équation du deuxième degré, il va empiriquement passer du temps à redémontrer un résultat connu. Et il ne pourra pas y échapper : la solution est unique et la manière exacte d'y arriver également. Comment va-t-il donc s'y prendre ? Pourra-t-il reproduire le dessin ci-dessus s'il n'a pas jamais manipulé de notions abstraites ? L'effet escompté est finalement l'inverse de celui recherché : le maçon perdra un temps précieux et son employeur, de l'argent !

Pour ce qui est des nombres complexes, celui qui fera l'effort de jouer avec les notions qu'ils renferment découvrira la beauté et l'ingéniosité de leur aspect géométrique : ils permettent de manipuler très simplement l'ensemble des transformations linéaires qu'on peut faire sur une surface (rotation, translation, dilatation). Et ce type de transformations permet par exemple de faire du traitement d'images médicales, de comparer la forme d'objets particuliers en s'affranchissant des contraintes de taille pour ne parler que de choses « appliquées » !

De façon plus générale, la question du cloisonnement des connaissances dans un but utilitariste est une aberration qui dépasse largement le cadre de l'enseignement des mathématiques. Est-il nécessaire d'avoir lu Proust pour savoir lire, écrire et aborder des problèmes dans la vie réelle ? Est-il utile d'enseigner l'Histoire alors qu'aujourd'hui toutes les informations sont disponibles sur Internet ? À quoi cela sert-il d'apprendre les tables de multiplication, les formules trigonométriques ? Le métier de peintre en bâtiment implique t-il de connaître les œuvres impressionnistes ? Peut être pas, mais alors pourquoi réserver Proust, la guerre de 100 ans et Manet à une catégorie de gens particuliers ? Quelles conséquences culturelles cela aurait-il que de proposer un enseignement purement utilitariste?

« Il suffit d'ouvrir les yeux pour voir que les conquêtes de l'industrie qui ont enrichi tant d'hommes pratiques n'auraient jamais vu le jour si ces hommes pratiques avaient seuls existé, et s'ils n'avaient été devancés par des fous désintéressés qui sont morts pauvres, qui ne pensaient jamais à l'utile, et qui pourtant avaient un autre guide que leur caprice.

C'est que comme l'a dit Mach, ces fous ont économisé à leurs successeurs la peine de penser. Ceux qui auraient travaillé uniquement en vue d'une application immédiate n'auraient rien laissé derrière eux et, en face d'un besoin nouveau, tout aurait été à recommencer. Or, la plupart des hommes n'aiment pas à penser et c'est peut être un bien, puisque l'instinct les guide, et le plus souvent mieux que la raison ne guiderait une pure intelligence, toutes les fois du moins qu'ils poursuivent un but immédiat et toujours le même ; mais l'instinct c'est la routine, et si la pensée ne le fécondait pas, il ne progresserait pas plus chez l'homme que chez l'abeille ou la fourmi. Il faut donc penser pour ceux qui n'aiment pas à penser et, comme ils sont nombreux, il faut que chacune de nos pensées soit aussi souvent utile que possible, et c'est pourquoi une loi sera d'autant plus précieuse qu'elle sera générale »

Poincaré développe le rôle des définitions dans l'enseignement, dans un chapitre qui n'a rien perdu de son actualité. Il distingue soigneusement la définition mathématique formelle, parfaite, de celle qui serait intelligible par la majorité des élèves. Il serait certainement préférable de donner d'abord une définition approximative qui s'adressera à l'intuition immédiate des élèves, en s'appuyant sur des éléments du réel, plutôt que de leur donner une définition abstraite dont les finesses échapperont, quitte à affiner petit à petit cette définition. Ce qui compte après tout, c'est de susciter la curiosité, la motivation de l'étudiant en le munissant des outils de réflexion qui l'amèneront à s'apercevoir que la définition est inexacte. Une définition rigoureuse mais abstraite ne peut avoir de sens que si l'esprit garde le cheminement intuitif qui mène à son écriture. Les mêmes remarques s'appliquent également à l'enseignement des mathématiques en biologie qui doit constamment rechercher un lien entre le monde réel sans jamais masquer la difficulté et le sens des théories mathématiques utiles pour l'étudier ●

David NÉRINI